$$\varphi|_{S^1}: S^1 \to D,$$

гомотопич. классы $[S^1, D]_i$ будут элементами 1-й гомотопической (фундаментальной) группы $\pi_1(D)$. Для существования топологически стабильных линейных дефектов требуется наличие изоморфизма $\pi_1(D) = \mathbb{Z}$. Наконец, когда $\dim \Sigma = 2$, мы приходим к параметрам порядка типа

$$\varphi|_{S^0}: S^2 \to D,$$

характерных для среды с планарными дефектами типа «доменных стенок» (рис. 4, *в*). Классификация проводится на основе т. н. 0-й гомотопической группы $\pi_0(D)$ и критерий существования стабильных планарных дефектов $\pi_0(D) = \mathbb{Z}$. Т. о., дефекты в конденсированных средах возникают как локализованные в пространстве структуры с нетривиальными топологич. характеристиками — индексами $N$, а их стабильность обеспечивается топологией пространства вырождения. Это и является основанием для рассмотрения перечисленных дефектов как Т. с. (в расширенном смысле). Следует отметить, что Т. с. в теории поля, как правило, обладают регулярным поведением во всей области определения.

На языке топологии получает естеств. объяснение и наиб. известный линейный дефект в кристаллах — краевая дислокация, возникающая при образовании лишней кристаллич. полуплоскости в решётке (рис. 5). Предполагается, что на расстояниях в несколько постоянных решётки от линии AB кристаллич. порядок восстанавливается. Поскольку пространство вырождения не зависит от вида кристалла, то достаточно рассмотреть простейший кубич. кристалл и смещения лишь вдоль одной из осей, $x$, с периодом решётки $a_x$. Состояния кристалла вырождены относительно сдвигов на $a_x$, т. к. такой сдвиг приводит к совмещению кристалла с самим собой. Иными словами, концы отрезка $[0, a_x]$ отвечают одному и тому же состоянию, что позволяет их отождествить. Для смещений $x$, лежащих вне отрезка $[0, a_x]$, всегда найдётся эквивалентное смещение внутри того же отрезка. В результате приходим к пространству вырождения кристалла по оси $x$ в виде отрезка $[0, a_x]$ с отождествлёнными концами, что топологически эквивалентно окружности $S^1$. Аналогичное вырождение состояний наблюдается и вдоль осей $y$ и $z$, т. е. пространством вырождения кристалла в целом будет $D = S^1 \otimes S^1 \otimes S^1 \equiv T^3$ — многообразие трёхмерного тора. Топологич. тип параметров порядка кристалла (в соответствии с приведённой выше схемой) будет характеризоваться группой $\pi_1(T^3) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, т. е. топологически устойчивые *дисклинации* в кристаллах обладают тремя целочисленными топологич. индексами $N_x$, $N_y$ и $N_z$, каждый из к-рых сохраняется при распадах и слияниях дислокаций. Отметим, что закон сохранения трёх индексов $N_i$,

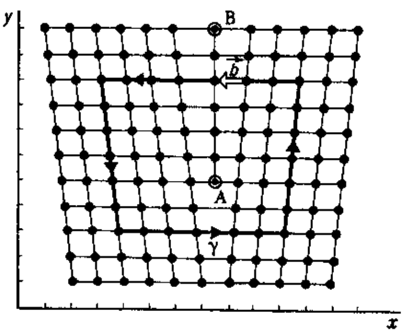


**Рис. 5.** Краевая дислокация в кубическом кристалле с осями вдоль $x$, $y$ и $z$. Линия дислокации, которая перпендикулярна плоскости рисунка и изображена точкой А, является краем лишней полуплоскости. Замкнутый контур $\gamma$ отвечает обходу линии дислокации в положительном направлении. Дислокация характеризуется топологическими индексами $N_x = 1$, $N_y = N_z = 0$ и вектором Бюргерса $\boldsymbol{b} = a_x \boldsymbol{e}_x$, перпендикулярным линии дислокации.

$i = x, y, z$, эквивалентен закону сохранения вектора Бюргерса $\boldsymbol{b} = a_x N_x \boldsymbol{e}_x + a_y N_y \boldsymbol{e}_y + a_z N_z \boldsymbol{e}_z$, где $\boldsymbol{e}_i$ — орт в направлении $i$-той оси. Поскольку топологич. тип линии дислокации не изменяется при непрерывных деформациях, то приведённый результат полностью переносится и на винтовые дислокации, к-рые топологически эквивалентны краевым.

В изотропном ферромагнетике пространством вырождения является двумерная сфера $D = S^2$. Действительно, при $T < T_C$ (точка Кюри) в ферромагнетике возникает спонтанная намагниченность с вектором намагниченности $\boldsymbol{M}$, длина к-рого фиксируется темп-рой образца: $|\boldsymbol{M}| = M(T)$. Энергия ферромагнетика может зависеть как от величины $\boldsymbol{M}$ (собственно магн. энергия), так и от направления вектора $\boldsymbol{M}$ (т. н. энергия *магнитной анизотропии*). Поскольку энергия магн. анизотропии, как правило, пренебрежимо мала по сравнению с чисто магн. энергией, то для одного и того же энергетич. состояния ферромагнетика вектор $\boldsymbol{M}$ при заданной $T$ может принимать все возможные направления. Каждому направлению нормированного на единицу вектора $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{M}(T)/M(T)$ (параметр порядка ферромагнетика) можно взаимно однозначно сопоставить точку на сфере $S^2$ (последняя возникает как геом. место точек — концов вектора $\boldsymbol{n}$). Следовательно, в изотропных магнетиках с $D = S^2$ могут существовать стабильные точечные дефекты («ежи»), т. к. $\pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$. В то же время линейные и планарные дефекты в таком магнетике будут неустойчивы. При наложении однородных граничных условий на бесконечности ($\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_0$ при $|\boldsymbol{r}| \to \infty$) возникает эфф. компактификация пространства $R^3$, т. е. $R^3 \bigcup \{\infty\} \equiv S^3$. В результате вместо (5) имеем отображения Хопфа (H. Hopf):

$$\boldsymbol{n}: S^3 \to S^2,$$

классифицирующиеся по группе $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$.

Простейшей нетривиальной конфигурацией поля в таком случае будет неособый кольцевой вихрь с инвариантом Хопфа $Q_H = 1$. Правда, для стабилизации такого вихря к лагранжиану обычной *сигма-модели* требуется добавить члены 4-го порядка по производным $\boldsymbol{n}$ [4].

Для анизотропного ферромагнетика типа «лёгкая плоскость» вектор $\boldsymbol{n}$ лежит в нек-рой плоскости, и пространством вырождения в этом случае будет $D = S^1$ (окружность). В таких образцах могут возникать устойчивые линейные дефекты — «вихри», т. к. $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$. В полярных координатах $(r, \varphi)$ на плоскости вне области дефекта $\Sigma$ параметр порядка можно представить в виде $\boldsymbol{n} = A(r, \varphi)\exp\{i\alpha(r, \varphi)\}$, где $\alpha(r, \varphi)$ — непрерывно меняющаяся фаза (угол между направлением $\boldsymbol{M}$ и нек-рым фиксиров. направлением в «лёгкой плоскости»). «Вихрем» будет такая особая линия, при обходе к-рой фаза меняется на $\alpha(r, 2\pi) - \alpha(r, 0) = 2\pi N$, где $N$ — топологический инвариант «вихря» — целое число, показывающее, сколько полных оборотов при этом делает вектор $\boldsymbol{n}$. На рис. 6, *а* изображён вихрь с $N = 1$, на рис. 6, *б* — с $N = -1$, 6, *в* — с $N = 0$.

Наконец, в ферромагнетиках типа «лёгкая ось» равновесными при каждом значении $T$ будут лишь два состояния $\boldsymbol{M} = \pm M \boldsymbol{v}$ (где $\boldsymbol{v}$ — единичный вектор в направлении «лёгкой оси» намагничивания), т. е. $D = S^0$. В силу того, что $\pi_0(S^0) = \mathbb{Z}$, можно говорить о допустимости Т. с. типа «доменных стенок» в магнетиках типа «лёгкая ось». Динамика простейших «доменных стенок» описывается синус-Гордона ур-нием, *Шрёдингера уравнением нелинейным* и т. д. ([5], [6]).

Параметром порядка в нематических *жидких кристаллах* (или нематиках) служит директор $\boldsymbol{d}$, указывающий преимущественное направление длинных осей вытянутых молекул нематика при нек-рой $T < T_C$ (в отличие от вектора $\boldsymbol{n}$, для директора направления $\boldsymbol{d}$ и $-\boldsymbol{d}$ физически неразличимы). [Название «нематик» предложено Ш. Фриделем (Ch. Friedel).] Областью вырождения $D$ (областью значений директора $\boldsymbol{d}$) в трёхмерном нематике является вещественное проективное пространство $RP^2$ (получаемое из сферы $S^2$ отождествлением диаметрально противоположных точек). Соответственно допустимы стабильные точечные